Rozšíření MA1 - domácí úkol 9.

Křivkový integrál .

Úvodem:

K prostudování základních poznatků o křivkovém integrálu skalární funkce, tj. $\int_K f\,ds$, i vektorové funkce, tj. $\int_{\vec{K}} \vec{f}\,d\vec{r}$ v R^2, resp. v R^3, můžete kromě doporučené literatury použít i přednášky, psané pro MA2, a to přednášky (písemné) z 4.5., 6.5. a 11.5. 2020. A snad jsou opět „napsány" tak, aby byly srozumitelné i studentům Rozšíření MA1, a jsou snad pomocí i při „samostudiu".

Přednáška 4.5.2020 (druhá část) obsahuje:

úvodní poznámky o tom, jak „rozumět" integrálu po křivce, nejprve z funkce skalární – na příkladu výpočtu hmotnosti nehomogenního drátu (místo křivky), a pak je zde definice křivkového integrálu skalární funkce. Dále je zde ukázána „cesta" k definici křivkového integrálu vektorové funkce – jako nástroje pro určení práce vektorového pole po cestě", dané křivkou.

V přednášce ze 6.5.2020 je pak definováno to, co potřebujeme pro to, abychom mohli „zpřesnit" křivkový integrál skalární i vektorové funkce:

1. definice křivky v $R^3(R^2)$ pomocí parametrizace (spolu s příklady křivek a jejich parametrizací);
2. vyjádření křivkových integrálů $\int_K f\,ds$ i $\int_{\vec{K}} \vec{f}\,d\vec{r}$ pomocí parametrizace křivky K ($\vec{K}$ je navíc křivka K, ale „orientovaná")

Dále jsou v této přednášce uvedeny podmínky existence křivkového integrálu skaláru i vektoru, vlastnosti křivkových integrálů, speciálně nezávislost na parametrizaci, a příklady výpočtu integrálů křivkových skalární funkce, i funkce vektorové.

Přednáška 11.5.2020 je pak věnována t.zv. konzervativním vektorovým polím, neboli polím potenciálním, která jsou též nazývána pole nevírová, kde křivkový integrál, tj. práce pole daného, „nezávisí na cestě". V přednášce je toto definováno, formulovány dále ekvivalentní „definice" nezávislosti integrálu vektorového pole na cestě, a uvedeny nutná podmínka i podmínky postačující potenciálnosti pole (postačující podmínky jen v R^2), které vedou navíc k důležitému diferenciálnímu operátoru, t.zv. rotaci vektoru $\vec{f}$, $\operatorname{rot}\vec{f} = „\nabla \times \vec{f}"$ $\left(\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \right)$

Na závěr je pak jen stručně uvedena jedna z vět, důležitých ve fyzice (ale i v matematice), t.zv. integrálních vět – a to ta „nejjednodušší" – t.zv. věta Greenova.

Před řešením příkladů z „domácího úkolu", spíše z „domácího cvičení", shrneme nejprve zde to, co pro výpočet křivkových integrálů potřebujeme (podrobněji v uvedených přednáškách pro MA2):

I. Křivka v R^3 (R^2)

(definice co nejjednodušší – snad „nejblíže" naší představě křivky v prostoru (či v rovině), jak je psáno v přednášce ze 6.5.2020, je řada definic obecnějších, ale snad ta „naše" definice bude stačit)

Definice: Křivkou K budeme nazývat množinu bodů v $R^3(R^2)$,
$K = \{ X \in R^3(R^2) ;\ X = \vec{r}(t),\ t \in \langle a,b\rangle\ (= \mathcal{I}) \}$, kde

1) $\vec{r}(t)$ je spojitá vektorová funkce v intervalu $\mathcal{I}$,
$\vec{r}(t) : \mathcal{I} \to R^3(R^2)$ ($\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, resp. $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in \mathcal{I}$);

2) existuje $\vec{r}'(t)$ ($= (x'(t), y'(t), z'(t))$, resp. $= (x'(t), y'(t))$, spojitá v $\mathcal{I}$ až na konečný počet bodů a v bodech nespojitosti existují vlastní jednostranné limity funkce $\vec{r}'(t)$);

3) $\vec{r}'(t) \neq \vec{o}$ v $\mathcal{I}$ až na konečný počet bodů (tedy křivka K „má" (až na konečný počet bodů) tečný vektor v bodech K)
"

Křivka, definovaná „nahoře", se nazývá křivka po částech hladká. A zobrazení $\vec{r} : t \in \mathcal{I} \to R^3(R^2)$ (z definice) – se nazývá parametrizace křivky K.

A speciální (užitečné) druhy křivek $K = \{ X \in R^3(R^2), X = \vec{r}(t), t \in \langle a,b\rangle \}$:

1) K je křivka hladká, je-li $\vec{r}'(t)$ spojitá v $\langle a,b\rangle$ a $\vec{r}'(t) \neq \vec{o}$ v $\langle a,b\rangle$ (tj. křivka má v každém bodě tečný vektor)

2) K je jednoduchý oblouk, když K je hladká křivka a zobrazení $\vec{r}(t)$ (tj. parametrizace) je funkce prostá v $\langle a,b\rangle$ (tj. pro $\forall t_1, t_2 \in \langle a,b\rangle$, $t_1 \neq t_2$ je $\vec{r}(t_1) \neq \vec{r}(t_2)$), tedy křivka K „neprotíná" sama sebe – krátce se říká jen „oblouk".
(příkladem je graf funkce $y = f(x)$, $x \in \langle a,b\rangle$, $f \in C^{(1)}(\langle a,b\rangle)$)

3) <u>K je jednoduchá uzavřená křivka</u>, když K je křivka hladká, $\vec{r}(a)=\vec{r}(b)$, a parametrizace $\vec{r}(t)$ je zobrazení prosté v intervalu $\langle a,b)$.
(příklad – kružnice v rovině)

Příklady křivek a jejich parametrizace jsou uvedeny v písemné přednášce z 6.5. 2020 (pro MA2).

<u>Pro křivkový integrál vektorové funkce</u> $\int_{\vec{K}} \vec{f}\cdot d\vec{r}$ <u>potřebujeme</u> ještě navíc „<u>křivku K orientovat</u>" (pak se orientovaná křivka značí $\vec{K}$), tedy určit „směr pohybu" po křivce K – nejčastěji:

<u>Orientace křivky $\vec{K}$, daná parametrizací</u>:

je-li $K=\{X\in R^3(R^2);\ X=\vec{r}(t),\ t\in\langle a,b\rangle\}$, pak
počáteční bod $\vec{K}$ ($p.b.\vec{K}$) je $A=\vec{r}(a)$,
koncový bod $\vec{K}$ ($k.b.\vec{K}$) je $B=\vec{r}(b)$.

Říkáme též, že <u>$\vec{K}$ je orientovaná souhlasně s parametrizací</u>.

A křivku K, opačně orientovanou, než je $\vec{K}$, značíme $\dot{-}\vec{K}$
(tj. $p.b.(\dot{-}\vec{K})=k.b.\vec{K}$ a $k.b.(\dot{-}\vec{K})=p.b.\vec{K}$)

A tečný vektor $\vec{r}\,'(t)\neq\vec{o}$ pak udává „směr pohybu" po $\vec{K}$, směr pohybu po křivce $\dot{-}\vec{K}$ ukazuje tak vektor $-\vec{r}\,'(t)\neq\vec{o}$.

A ještě jedno užitečné značení: máme-li křivky (orientované) $\vec{K}_1,\vec{K}_2$ takové, že $k.b.\vec{K}_1=p.b.\vec{K}_2$, pak budeme značit křivku $\vec{K}$, která bude „sjednocením" $\vec{K}_1,\vec{K}_2$ tak, že $p.b.\vec{K}=p.b.\vec{K}_1$ a $k.b.\vec{K}=k.b.\vec{K}_2$, takto: $\vec{K}=\vec{K}_1\dot{+}\vec{K}_2$.

II. Vyjádření křivkových integrálů pomocí parametrizace křivky

1. křivkový integrál skalární funkce:

(i) (pro jednoduchost) K je hladká křivka, $X = \vec{r}(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$;

(ii) f je spojitá funkce v oblasti $\omega \subset R^3 (R^2)$, $K \subset \omega$;

pak $\int_K f\,ds$ existuje a $\displaystyle\int_K f\,ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \cdot \|\vec{r}\,'(t)\|\,dt$,

tj. v R^3: $$\int_K f\,ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt$$

(analogicky v R^2)

2. křivkový integrál vektorové funkce:

(i) $\vec{K}$ je hladká (orientovaná souhlasně s parametrizací) křivka,
$X = \vec{r}(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$, $\vec{K} \subset \omega \subset R^3(R^2)$, ω - oblast;

(ii) $\vec{f}$ je spojitá vektorová funkce v oblasti $\omega \subset R^3(R^2)$.

Pak $\displaystyle\int_{\vec{K}} \vec{f} \cdot d\vec{r} \underset{\text{dle definice}}{=} \int_K (\vec{f} \cdot \vec{\tau})\,ds$ (kde $\vec{\tau}$ je tečný vektor jednotkové délky v bodech K)

a protože $\vec{\tau}(\vec{r}(t)) = \dfrac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|}$ ($\vec{r}\,'(t) \neq \vec{o}$ v $\langle a, b \rangle$ - plyne z předpokladu (i) o $\vec{K}$),

dostaneme:

$$\int_{\vec{K}} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_K (\vec{f} \cdot \vec{\tau})\,ds \underset{(1)}{=} \int_a^b \vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|} \cdot \|\vec{r}\,'(t)\|\,dt, \text{ tedy}$$

($\vec{f} \cdot \vec{\tau}$ – skalární součin vektorů $\vec{f}(X)$ a $\vec{\tau}(X)$ v bodech křivky K)

„vzorec" pro výpočet křivkového integrálu vektoru je:

$$\int_{\vec{K}} \vec{f}\, d\vec{r} = \int_a^b \vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt\,,$$ rozepsáno (v R^3, v R^2 analogicky) $\left(\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)\right)$

$$\int_{\vec{K}} \vec{f}\, d\vec{r} = \int_a^b \Big(f_1(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) + f_2(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t) + f_3(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t) \Big) dt$$

(opět – $\vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)$ je skalární součin vektorů $\vec{f}(\vec{r}(t))$ a $\vec{r}\,'(t)$)

Poznámka (ke značení)

Ve fyzice (a asi i ve fyzikální chemii) se často značí křivkový integrál takto:

$$d\vec{r} = (dx, dy, dz)\,, \quad \vec{f} = (f_1, f_2, f_3)\,, \text{ pak}$$

$$\left(\int_{\vec{K}} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \right) \int_{\vec{K}} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz\,,$$

a pak se „snadno" pamatuje „vzorec" (nahoře uvedený) pro výpočet křivkového integrálu vektoru, udělá se jakoby „substituce"

za $\vec{r}(t)$: $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, pak $\quad t \in \langle a, b \rangle$,

za $dx = x'(t)\, dt$, $dy = y'(t)\, dt$, $dz = z'(t)\, dt$,

a pak

$$! \int_{\vec{K}} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz = \int_a^b \Big(f_1(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) + f_2(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t) + f_3(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t) \Big) dt$$

A nyní už můžeme řešit „příklady.

1. Vypočítejte křivkový integrál

a) $\int\limits_K \frac{x}{y} ds$, kde K je oblouk paraboly $y^2 = x$, spojující body (1, 1) a (4, 2) .

(i) parametrizace křivky K:

daná křivka, oblouk paraboly o rovnici $y^2=x$, je popsána tak, že pro bod $[x,y] \in K$ je „x funkcí“ y, tj. křivka „má“ body $[y^2, y]$, tedy pro parametrizaci je „vhodné“ zvolit za parametr zvolit „y“, tedy:

$K: \quad y=t,\ x=t^2, \quad t \in \langle 1,2\rangle$ (křivka má „spojit“ body s $y=1$ a $y=2$)

tedy ve tvaru vektorové funkce:

$\vec{r}(t) = (t^2, t),\ t \in \langle 1,2\rangle$, a pak

$\vec{r}\,'(t) = (2t, 1)$ a $\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{(2t)^2+1^2} = \sqrt{4t^2+1}$;

Pak, dle vzorce (II/1), je-li parametrizace K: $X=\vec{r}(t),\ t\in\langle a,b\rangle$:

$$\int\limits_K f(x,y)\,ds = \int\limits_a^b f(x(t),y(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt \quad ,$$

dostaneme zde:

$$\int\limits_K \frac{x}{y}\,ds = \int\limits_1^2 \frac{t^2}{t}\sqrt{4t^2+1}\,dt \underset{1VS}{=} \left| \begin{array}{c} 4t^2+1=u \\ 8t\,dt=du \\ t=1 \rightarrow u=5 \\ t=2 \rightarrow u=17 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{8}\int\limits_5^{17} \sqrt{u}\,du = \frac{1}{8}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_5^{17} \cdot \frac{2}{3} = \underline{\frac{1}{12}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right)}$$

b) $\int_K z\,ds$, kde $K=\{X=(x,y,z);\ x=t\cos t,\ y=t\sin t,\ z=t,\ t\in[0,\sqrt{2}]\}$

---

v tomto příkladu už je křivka K dána parametrizací, tedy

$$K:\quad X=\vec{r}(t)=(t\cos t,\ t\sin t,\ t),\quad t\in\langle 0,\sqrt{2}\rangle,\ \text{pak}$$

$$\vec{r}\,'(t)=(\cos t-t\sin t,\ \sin t+t\cos t,\ 1),\quad t\in\langle 0,\sqrt{2}\rangle,$$

$$\text{a}\quad \|\vec{r}\,'(t)\|=\sqrt{(\cos t-t\sin t)^2+(\sin t+t\cos t)^2+1^2}=$$

$$=\sqrt{\cos^2 t-2t\cos t\sin t+t^2\sin^2 t+\sin^2 t+2t\cos t\sin t+t^2\cos^2 t+1}=$$

$$=\sqrt{2+t^2},\quad t\in\langle 0,\sqrt{2}\rangle;$$

a pak výpočet integrálu:

$$\int_K z\,ds=\int_0^{\sqrt{2}} t\cdot\sqrt{2+t^2}\,dt \underset{1VS}{=} \left|\begin{array}{l} 2+t^2=u\\ 2t\,dt=du\\ t=0\ \rightarrow\ u=2\\ t=\sqrt{2}\ \rightarrow\ u=4\end{array}\right| =$$

$$=\frac{1}{2}\int_2^4\sqrt{u}\,du=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_2^4=\frac{1}{3}\left(8-2\sqrt{2}\right)$$

Poznámka: umíme si křivku K představit?

Snadněji si představíme křivku v rovině, jejíž parametrizace je $[t\cos t,\ t\sin t,\ 0]$, což je průmět zadané křivky do roviny $z=0$; pro $t\in\langle 0,\infty)$ je to spirála ($t\in\langle 0,6\pi\rangle$ např. jsou tři „závity"), vzdálenost bodů tohoto průmětu od počátku je $d(t)=\sqrt{t^2\cos^2 t+\sin^2 t\cdot t^2}=t$; a body naší křivky pak „stoupají" ve směru osy z rychlostí 1.

c) $\int\limits_{\vec{K}} 2xy\,dx + x^2\,dy$, kde křivka K je

i) úsečka s počátečním bodem (0, 0) a koncovým bodem (1,1);

ii) oblouk paraboly $y = x^2$ s počátečním bodem (0, 0) a koncovým bodem (1,1);

iii) část grafu funkce $y = x^3$ s počátečním bodem (0, 0) a koncovým bodem (1,1).

V tomto příkladu je už křivkový integrál vektorové funkce, (zapsaný v tom „praktickém" tvaru), kde funkce $\vec{f}(x,y)$ je $\underline{\vec{f}(x,y) = (2xy, x^2)}$ (definovaná a spojitá v R^2)

(i) $\underline{\vec{K}_1 \text{ je úsečka, p.b. } \vec{K}_1 = (0,0), \text{ k.b. } \vec{K}_1 = (1,1):}$

pro výpočet integrálu „potřebujeme" <u>parametrizaci</u> $\vec{K}_1$ (tj. úsečky):

$x = t,\ y = t,\ t \in \langle 0,1\rangle$, tj. $\vec{r}(t) = (t,t)$, $t \in \langle 0,1\rangle$,

$\vec{r}'(t) = (1,1)$,

a pak $$\int\limits_{\vec{K}_1} 2xy\,dx + x^2 dy = \int_0^1 (2t^2 + t^2)\,dt = \int_0^1 3t^2 dt = \left[t^3\right]_0^1 = \underline{\underline{1}};$$

připomeneme „vzorec" pro výpočet z II/2 (v R^2):

$$\int\limits_{\vec{K}} \vec{f}\cdot d\vec{r} = \int\limits_{\vec{K}} f_1 dx + f_2 dy = \int_a^b \Big(f_1(x(t),y(t))\cdot x'(t) + f_2(x(t),y(t))\,y'(t)\Big)dt,$$

kde $\vec{K}$ je parametrizovaná: $X = \vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in \langle a,b\rangle$.

(ii) $\underline{\vec{K}_2 \text{ je oblouk paraboly } y = x^2, \text{ p.b. } \vec{K}_2 = (0,0), \text{ k.b. } \vec{K}_2 = (1,1):}$

<u>parametrizaci $\vec{K}_2$</u> nejsnadněji provedeme volbou $x = t$, pak $y = t^2$, a tedy $\vec{r}(t) = (t,t^2)$, $t \in \langle 0,1\rangle$, a $\vec{r}'(t) = (1,2t)$, $t \in \langle 0,1\rangle$.

Pak

$$\int_{\vec{K_2}} 2xy\,dx + x^2dy = \int_0^1 (2t^3 + t^2 \cdot 2t)\,dt = \int_0^1 4t^3\,dt = \left[t^4\right]_0^1 = \underline{\underline{1}}$$

(iii) <u>$\vec{K_3}$ je část grafu funkce $y = x^3$, p.b. $\vec{K_3} = (0,0)$, k.b. $\vec{K_3} = (1,1)$</u>

<u>parametrizace $\vec{K_3}$</u>: je jednoduché zvolit parametr $t = x$, pak $y = t^3$,

pak $\vec{K_3}$: $X = \vec{r}(t) = (t, t^3)$, $t \in \langle 0,1 \rangle$, $\vec{r}\,'(t) = (1, 3t^2)$;

a

$$\int_{\vec{K_3}} 2xy\,dx + x^2dy = \int_0^1 (2t \cdot t^3 + t^2 \cdot 3t^2)\,dt = \int_0^1 5t^4\,dt = \left[t^5\right]_0^1 = \underline{\underline{1}}$$

<u>Poznámka na závěr:</u>

To, že integrály $\int_{\vec{K_i}} 2xy\,dx + x^2dy$ „vyšly" stejné pro různé křivky $\vec{K_i}$, $i = 1,2,3$, spojující vždy body $(0,0)$ a $(1,1)$, není náhoda, neboť vektorové pole $\vec{f}(x,y) = (2xy, x^2)$ je potenciální pole v R^2 (konzervativní, nevírové), kde křivkový integrál vektorového pole „nezávisí na cestě", tedy integrály po křivkách, které splňují „naše" podmínky pro existenci křivkového integrálu, závisí jen na počátečním a koncovém bodu příslušné „cesty".

Ukážeme si toto pro pole $\vec{f}$ v tomto příkladu, až si zopakujeme, co je třeba.

2. a) Definujte pojmy :
   i) potenciální vektorové pole v oblasti $\omega \subset R^3\left(R^2\right)$
   ii) potenciál vektorového pole v oblasti $\omega \subset R^3\left(R^2\right)$
   a formulujte nutnou podmínku a postačující podmínky pro potenciálnost vektorového pole v oblasti $\omega \subset R^2$.

(i) Vektorové pole $\vec{f}$ je potenciální v oblasti $\omega \subset R^3(R^2)$, když existuje skalární funkce $U : \omega \longrightarrow R$ tak, že $\vec{f} = \nabla U$ v ω, tj. $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3) = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right)$ v ω.

Funkce U se nazývá potenciál pole $\vec{f}$ v oblasti ω.

Poznámka: pro jednoduchost budeme uvažovat $U \in C^{(1)}(\omega)$, tj. funkce U má spojité derivace prvního řádu v ω, tedy uvažujeme i pole $\vec{f}$, spojitá v ω.

(ii) Platí:

a) Pole $\vec{f}$ je potenciální v oblasti $\omega \subset R^3(R^2)$ $\Longleftrightarrow$ křivkový integrál $\vec{f}$ v ω nezávisí na cestě, tedy platí: pro libovolné body $A, B \in \omega$, a libovolné měřitelné křivky $\vec{K}_1, \vec{K}_2$ (tj. křivky K, pro které existuje $\int_K ds$ – což je možné chápat jako délku křivky K, což „naše" křivky splňují), takové, že $p.b.\ \vec{K}_1 = p.b.\ \vec{K}_2 = A$, $k.b.\ \vec{K}_1 = k.b.\ \vec{K}_2 = B$ je $\int_{\vec{K}_1} \vec{f}\,d\vec{r} = \int_{\vec{K}_2} \vec{f}\,dr$.

Pak integrál značíme $\int_A^B \vec{f}\,d\vec{r}$ $\left(= \int_{\vec{K}_i} \vec{f}\,dr,\ i=1,2\right)$

b) Pole $\vec{f}$ je potenciální v ω $\Longleftrightarrow$ $\oint_{\vec{K}} \vec{f}\,d\vec{r} = 0$ pro každou uzavřenou (měřitelnou) křivku $\vec{K}$ v ω.

c) Je-li $\vec{f} = \nabla U$ v ω, $U \in C^{(1)}(\omega)$ (tj. $\vec{f} \in C(\omega)$),

pak $\displaystyle\int_A^B \vec{f}\, d\vec{r} = U(B) - U(A)$ pro libovolné body $A, B \in \omega$.

(všimněte si podobnosti s Newtonovým vzorcem pro určitý integrál: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, kde $F'(x) = f(x)$ v $\langle a, b\rangle$)

d) nutná podmínka potenciálnosti pole $\vec{f} \in C^{(1)}(\omega)$:

je-li $\vec{f} \in C^{(1)}(\omega)$, $\omega \subset R^3 (R^2)$ je oblast, a $\vec{f}$ je potenciální v ω, pak $\operatorname{rot} \vec{f} = \vec{o}$ v oblasti ω.

Operátor (diferenciální) $\operatorname{rot}\vec{f}$ je definován jako „$\nabla \times \vec{f}$", kde $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, tedy pro $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$

$$\operatorname{rot} \vec{f} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)$$

(ve fyzice se často vyjadřuje $\operatorname{rot}\vec{f}$ pomocí rozvoje dle 1. řádku, kde jsou vektory kanonické báze $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (tj. vektory jednotkové délky, navzájem kolmé):

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\cdot \vec{k} \;)$$

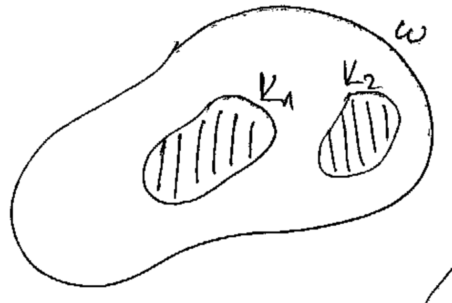
speciálně, <u>pro rovinné pole $\vec{f}(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$</u>, které bychom uvažovali jako pole „prostorové" $\vec{f}(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y), 0)$, je $\operatorname{rot}\vec{f} = \left(0, 0, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)$, tedy nutná podmínka potenciálnosti pole $\vec{f}$ v oblasti ω je: $\vec{f} = (f_1, f_2)$ je v $\omega \subset R^2$ potenciální $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0$$

e) postačující podmínka potenciálnosti rovinného vektorového pole $\vec{f}$, $\vec{f} \in C^{(1)}(\omega)$, $\omega \subset R^2$ je oblast:

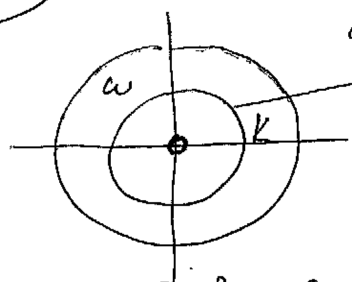
Je-li oblast $\omega \subset R^2$ t. zv. jednoduše souvislá (nebo S-oblast jiný „název"), a $\operatorname{rot} \vec{f} = \vec{o}$ v ω, pak pole $\vec{f}$ je v ω potenciální.

A co znamená „oblast ω je jednoduše souvislá" (S-oblast) –
– je to taková oblast v rovině, kde s každou uzavřenou křivkou je v ω i celý vnitřek této křivky – načrtneme:



apod. ;

ale máme-li třeba kruh o středu v $[0,0]$, ale „bez" tohoto středu, pak už tato jednoduše souvislá oblast není:



→ vnitřek této křivky má „díru", celý vnitřek nepatří do ω

Tedy: $\omega_1 = \{ [x,y] ;\ x^2+y^2 < 4 \}$ je S-oblast, ale
(například) $\omega_2 = \{ [x,y] ;\ 0 < x^2+y^2 < 4 \}$ už není

<u>A výpočet potenciálu, víme-li, že $\vec{f}$ je potenciální v oblasti ω:</u>

a) nechť $\vec{f} \in C^{(1)}(\omega)$, $\omega \subset R^3 (R^2)$, pak $U(X) = \int_A^X \vec{f}\, d\vec{r}$, kde $X \in \omega$, a $A \in \omega$ je pevný bod;

b) můžeme též užít vztahu pro $\vec{f}$ a U, tj. $\vec{f} = \nabla U$ v ω, a spočítat $U(x,y,z)$ (jednodušší pro $\omega \subset R^2$, $U(x,y)$) integrací tohoto vztahu, tj. integrací rovnic
$$\frac{\partial U}{\partial x} = f_1, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = f_2 \quad \left(\text{a } \frac{\partial U}{\partial z} = f_3 \text{ v případě } \vec{f} \text{ def. v } \omega \subset R^3\right)$$
(ukážeme si pro $\omega \subset R^2$ v příkladu)

b) Buď dána v $R^2 - \{[0,0]\}$ funkce $U(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Najděte v $R^2 - \{[0,0]\}$ vektorové pole $\vec{f}$, jehož potenciálem je funkce U.

Je-li funkce $U(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, definovaná v $\omega = R^2 \setminus \{[0,0]\}$, potenciálem pole $\vec{f}$, pak platí, že $\vec{f}(x,y) = \nabla U(x,y)$ v ω, tedy $f_1(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}(x,y)$ a $f_2(x,y) = \frac{\partial U}{\partial y}(x,y)$ v ω.

Tedy můžeme „spočítat" hledané pole:

$$f_1(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = -\frac{1}{2}\cdot(x^2+y^2)^{-3/2}\cdot 2x = \frac{-x}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}$$

a

$$f_2(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = -\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-3/2}\cdot 2y = \frac{-y}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}.$$

Tedy, hledané pole je $\vec{f}(x,y) = -\frac{(x,y)}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}$.

Toto je příklad t.zv. „centrálního" vektorového pole, tento typ polí (s vhodnými konstantami) se vyskytuje ve fyzice (gravitační pole hmotného bodu např.)

<u>A důležitá poznámka:</u>

tento příklad „ukazuje", že pole může být potenciální i v oblasti ω, která není jednoduše souvislá (není S-oblast), tedy podmínka, že oblast ω je jednoduše souvislá je podmínka postačující pro potenciálnost pole $\vec{f}$ (spolu s $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$ v ω), <u>ne nutná</u>!

c) Je dáno vektorové pole $\vec{f}(x,y) = 4\left(x^3 - xy^2,\, y^3 - x^2 y\right)$.

i) Dokažte, že toto pole je potenciální v celé rovině.

ii) Vypočítejte potenciál pole $\vec{f}$.

iii) Vypočítejte integrál $\int_K \left(x^3 - xy^2\right)dx + \left(y^3 - x^2 y\right)dy$,

kde K je kladně orientovaná kružnice o středu v počátku a poloměru $r = 2$.

(i) rovina, tj. prostor R^2 zde, je jistě jednoduše souvislá oblast, tedy zde stačí pro potenciálnost pole $\vec{f}$ ukázat, že platí v R^2

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y), \quad (x,y) \in R: \quad (*)$$

a zde:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(4(x^3 - xy^2)\right) = -8xy, \quad (x,y) \in R^2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(4(y^3 - x^2 y)\right) = -8xy,$$

tedy platí (*) a pole je potenciální v $\omega = R^2$;

(ii) výpočet potenciálu pole $\vec{f}$ v R^2: pro potenciál U pole $\vec{f}$ platí v R^2:

$$(1)\ \frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = 4(x^3 - xy^2) \quad \text{a} \quad (2)\ \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = 4(y^3 - x^2 y).$$

integrací (1) (podle x) dostáváme:

$$(3)\quad U(x,y) = 4\int (x^3 - xy^2)\,dx = x^4 - 2x^2y^2 + c(y)$$

Pozor: při integraci „konstanta" obvyklá je ale konstantou vzhledem k proměnné „x", tedy může být funkcí $c(y)$ proměnné „y" !

A jak „získáme" $c(y)$?

z (3): $\dfrac{\partial U}{\partial y}(x,y) = -4x^2y + c'(y)$ a zároveň

z (2): $\dfrac{\partial U}{\partial y}(x,y) = 4(y^3 - x^2 y)$, tedy platí (derivaci má funkce nejvýše jednu):

$$-4x^2y + c'(y) = 4y^3 - 4x^2y, \text{ tedy } c'(y) = 4y^3,$$

a odtud: $c(y) = y^4 + K$, K - konstanta;

a máme: $\underline{U(x,y) = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + K,\ K \in R,\ (x,y) \in R^2}$

$$\left(U(x,y) = (x^2 - y^2)^2 + K \right)$$

(iii) protože pole $\vec{f}(x,y) = 4\,(x^3 - xy^2,\ y^3 - x^2y)$ je pole potenciální v R^2, je zřejmé i pole $\frac{1}{4}\vec{f}(x,y) = (x^3 - xy^2;\ y^3 - x^2y)$ pole potenciální v R^2 (ihned plyne), a tedy

$$\oint_{\vec{K}} (x^3 - xy^2)dx + (y^3 - x^2y)dy = 0$$

pro každou uzavřenou (měřitelnou) křivku v R^2, tedy i pro (v příkladu zadanou) kladně orientovanou kružnici o středu v počátku a poloměru $r = 2$.

<u>A „tréninkově" ukažme i výpočtem:</u>

parametrizace $\vec{K}$: $\quad x(t) = 2\cos t,\ y(t) = 2\sin t$,

$\quad x'(t) = -2\sin t,\ y'(t) = 2\cos t$, $\quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$;

pak $\displaystyle\oint_{\vec{K}} (x^3 - xy^2)dx + (y^3 - x^2y)dy =$

$$= 16 \int_0^{2\pi} \left[(\cos^3 t - \cos t \sin^2 t)(-\sin t) + (\sin^3 t - \cos^2 t \sin t)\cos t \right] dt$$

$$= 16 \int_0^{2\pi} \left(2\cos^3 t\,(-\sin t) + 2\sin^3 t \cdot \cos t \right) dt \underset{\text{1VS}}{=} 16 \left[\frac{\cos^4(t)}{2} + \frac{\sin^4(t)}{2} \right]_0^{2\pi} = 0$$

c) $\int\limits_{\vec{K}} 2xy\,dx + x^2\,dy$, kde křivka K je

i) úsečka s počátečním bodem (0, 0) a koncovým bodem (1,1);

ii) oblouk paraboly $y = x^2$ s počátečním bodem (0, 0) a koncovým bodem (1,1);

iii) část grafu funkce $y = x^3$ s počátečním bodem (0, 0) a koncovým bodem (1,1).

Ještě se vraťme k tomuto příkladu z části I (slíbeno na str. 10)

(i) ukážeme, že pole $\vec{f}(x,y) = (2xy, x^2)$ je potenciální v rovině R^2:

R^2 je (opět, už víme) jednoduše souvislá oblast, stačí ukázat, že $\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y}$, a zde $\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = 2x$, $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = 2x$,

tedy pole $\vec{f}(x,y)$ je potenciální v R^2;

(ii) výpočet potenciálu $U(x,y)$ daného pole v R^2:

platí (v R^2): $\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = 2xy \Rightarrow U(x,y) = \int 2xy\,dx = x^2 y + C(y)$,

pak
$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) &= x^2 + C'(y), \text{ a zároveň}\\ \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) &= x^2,\end{aligned}\right\} \Rightarrow C'(y) = 0, \text{ tedy } C(y) = C,$$

a $U(x,y) = x^2 y + C$ v R^2

(iii) pak $\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} 2xy\,dx + x^2 dy$ nezávisí na cestě, a platí

$$\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} 2xy\,dx + x^2 dy = U(1,1) - U(0,0) = 1.1 = 1$$

(tedy opět „vyšlo")

a navíc, $\oint\limits_{\vec{K}} 2xy\,dx + x^2 dy = 0$ pro každou uzavřenou křivku v rovině.

Zkusme si $\oint_{\vec{K}} 2xy\,dx + x^2 dy$ i spočítat (cvičně) po kružnici $\vec{K}$ o středu v $[0,0]$ a poloměru $R>0$ (kladně orientované):

$\vec{K}$: $\vec{r}(t) = (R\cos t, R\sin t)$, $\vec{r}'(t) = (-R\sin t, R\cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$

a pak

$$\oint 2xy\,dx + x^2 dy = \int_0^{2\pi} 2R^2 \cos t . \sin t \, (-R\sin t) + R^2\cos^2 t . R\cos t \;)dt =$$

$$= R^3 \int_0^{2\pi} (-2\cos t \sin^2 t + \cos^3 t\,)dt = 0, \text{ neboť}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos t \, dt \underset{1VS}{=} \left[\frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^{2\pi} = 0, \text{ a stejně i}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^3 t\,dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t . \cos t\,dt = \int_0^{2\pi} (1-\sin^2 t)\cos t\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos t\,dt - \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos t\,dt = \left[\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^{2\pi} = 0$$

A na závěr – zkusme si určit potenciál pole $\vec{f}$ dle vztahu a) na straně 13, kde bylo:

potenciál: $U(X) = \int_A^X \vec{f} d\vec{r}$ v oblasti ω, kde $\vec{f} \in C(\omega)$; $A, X \in \omega$;

zde označme proměnný bod $X \dots X_0 = (x_0, y_0)$, a zvolme $A = [0,0]$, a integrujme po úsečce, p.b. $= [0,0]$, k.b $= (x_0, y_0)$, tj. parametrizace úsečky je $\vec{r}(t) = (x_0 t, y_0 t)$, $\vec{r}'(t) = (x_0, y_0)$, $t \in \langle 0,1\rangle$.

Pak:

$$U(x_0,y_0) = \int_{[0,0]}^{(x_0,y_0)} 2xy\,dx + x^2 dy = \int_0^1 (2x_0 y_0 t^2 . x_0 + x_0^2 t^2 . y_0)dt =$$

$$= \int_0^1 3x_0^2 y_0 t^2 dt = x_0^2 y_0 \left[t^3\right]_0^1 = \underline{x_0^2 y_0}, \text{ což souhlasí}$$

již s námi dříve určenými $U(x,y)$, konstanta zde je $C = 0$.